

# Mathematische Beschreibung des Wankelmotors



Maturaarbeit von:

Simon Schmidlin

Föhrenweg 3, 9470 Buchs

Kantonsschule Sargans, 4NPa

Fachbereich: Mathematik

Betreuer: Dr. Jakob Brunner

Februar 2004

## Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort .....	2
2	Einleitung .....	3
3	Grundsätzliche Unterschiede bezüglich eines Hubkolbenmotors .....	4
4	Geschichte .....	5
5	Dichtungssystem .....	8
6	Vor- & Nachteile des Wankelmotors .....	9
6.1	Vorteile .....	9
6.2	Nachteile .....	9
7	Zukunftsaussichten .....	10
7.1	Renesis-Motor .....	10
7.2	Diesel/Kerosin-Vielstoff-Motor der Wankel Rotary GmbH .....	11
7.3	Mini-Rotary Engine .....	11
8	Zykloiden .....	12
8.1	Beispiele von Zykloiden .....	14
9	Epizykloiden .....	15
9.1	Beispiele von Epizykloiden .....	18
9.2	Bemerkungen zu den Beispielen .....	19
9.3	Beweis, dass die Astroide ein Epizykloide ist .....	20
10	Hypozykloiden .....	23
10.1	Beispiele von Hypozykloiden .....	25
11	Anwendung auf den Wankelmotor .....	26
11.1	Der Läufer .....	30
11.2	Kurvenlänge der Läufer Spitze .....	32
11.3	Integration der Hypozykloide des Wankelmotors .....	34
11.4	Verdichtungsvorgänge .....	35
12	Diskussion .....	38
13	Literaturverzeichnis .....	39
14	Dank .....	40
15	Deklaration zur Eigenständigkeit .....	40

## 1 Vorwort

In der „SonntagsZeitung“ vom 25. August 2002 konnte man folgende Zeilen lesen:

„Er war ein technischer Visionär und zählt zu den bedeutendsten Motorenpionieren. Vor allem aber war der vor hundert Jahren im badischen Lahr geborene Felix Wankel ein nimmermüder Tüftler.“

In diesem Artikel wurde auch beschrieben, wie der Wankelmotor funktioniert. Als ich die Zeichnungen zur Arbeitsweise des Motors sah, war ich sehr beeindruckt davon. Auf der Suche nach weiteren Informationen zum Wankelmotor stieg das Interesse immer mehr, und ich beschloss, meine Maturaarbeit zu diesem Thema zu schreiben. Doch ich wollte weniger den geschichtlichen Hintergrund, als vielmehr die Mathematik, die hinter dem Wankelmotor steckt, genauer betrachten.

Im Verlauf meiner Arbeit erhielt der von Mazda entwickelte RENESIS-Wankelmotor die Auszeichnung „International Engine of the Year 2003“, wodurch mir klar wurde, dass diese Art von Antrieb ein grosses Zukunftspotential in sich birgt.

## 2 Einleitung

In meiner Maturaarbeit will ich die Bewegungskurve des Kolbens mathematisch beschreiben, zudem sollen mathematisch verwandte Kurven betrachtet werden. Natürlich werde ich auch den geschichtlichen Hintergrund nicht ausser Acht lassen und welche Zukunftsaussichten der Wankelmotor heute hat. Als erstes Kapitel sollen die grundsätzlichen Unterschiede zwischen einem Wankel- und einem Hubkolbenmotor dargestellt werden.

Das Verdichtungsverhältnis und die Kammervolumina werden am Ende der Arbeit berechnet.

Der Hauptteil der vorliegenden Maturaarbeit fängt dementsprechend mit Kapitel 8 an, in welchem die Zykloiden betrachtet werden.

### 3 Grundsätzliche Unterschiede bezüglich eines Hubkolbenmotors

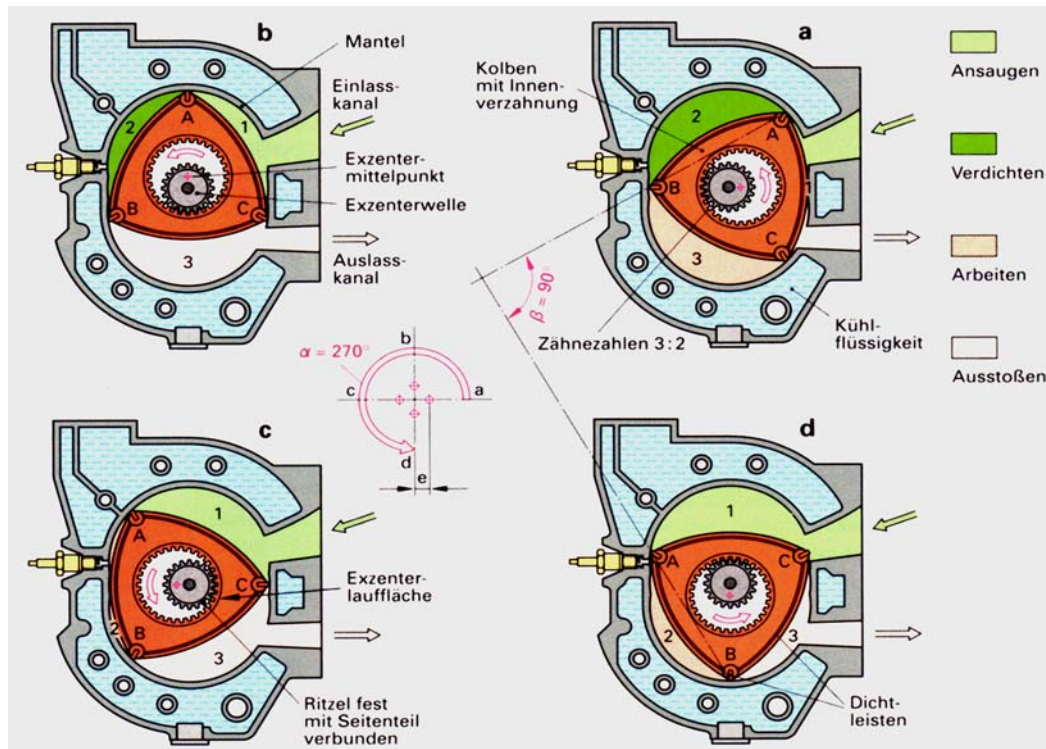


Abb: Arbeitsweise des Wankelmotors<sup>1</sup>

Bei einem Hubkolbenmotor führt der Kolben eine auf- und abgehende Bewegung aus, die über die Pleuelstange in Verbindung mit der Pleuelwelle erst in eine Drehbewegung verwandelt werden muss. Beim Wankelmotor dreht sich der Pleuelkolben und erzeugt unmittelbar Dreharbeit. Beim Wankelmotor fällt also das Beschleunigen und Verzögern der auf- und abgehenden Massen des Hubkolbenmotors weg, dadurch verschwinden natürlich auch die störenden Motorschwingungen, welche die Lager der Pleuelwelle beanspruchen und die Pleuelruhe verschlechtern. Deshalb kann der Wankelmotor auf die Ausgleichswellen verzichten, die ein Pleuelmotor benötigt, um diese störenden Schwingungen auszugleichen. Der Wankelmotor arbeitet nach dem Viertaktprinzip, da ein geschlossener Gaswechsel vorhanden ist. Aber zugleich arbeitet der Wankelmotor nach dem Zweitaktprinzip, da der Pleuelkolben den Gaswechsel über Schlitze in der Pleuelauflagebahn steuert und eine Pleuelwellendrehung einem Arbeitsspiel (Ansaugen, Verdichten, Arbeiten, Ausstoßen) entspricht.

<sup>1</sup>Fachkunde Kraftfahrzeugtechnik 27.Auflage, S.370

## 4 Geschichte

Der Deutsche Ingenieur Felix Wankel gilt als Erfinder des heutigen Wankelmotors.



*Abb: Felix Wankel und sein Lebenswerk<sup>2</sup>*

Er wurde am 13.8.1902 in Lahr (ca. 80km von Basel entfernt) geboren. 1926 lernte er den arbeitslosen Ingenieur Ernst Wolf kennen. Zusammen arbeiteten sie bis 1936 an der Anfertigung von Maschinenteilen und den Abdichtungsversuchsvorrichtungen. Im Alter von 25 Jahren schrieb er in sein Tagebuch, dass er denselben Gaskraftvorgang, der sich in der auf- und abgehenden Kolbenzylindermaschine abspielt, in der Drehung abspielen lassen will. Ansaugen, Verdichten, Entzünden und Ausstossen sollten in der bisherigen Form geschehen, da er sie für die Entzündungs-Kraft-Eigenschaft des Benzins am entsprechendsten halte. Er sah seine Aufgabe darin die mechanische Gestaltung und Bewältigung dieser „Gasbearbeitung“ mit voll umdrehendem Kolben zu entwickeln.

Es dauerte allerdings bis Mitte der 50er Jahre, bis er seine Idee verwirklichen konnte. Am 13.4.1954 skizzierte Wankel einen dreieckigen Kolben, der in einem epitrochoidenförmigen (siehe Kapitel 9) Aussenläufer eine Drehbewegung ausführt. Dieser Tag gilt als der Tag der Erfindung des Wankelmotors.

---

<sup>2</sup> <http://www.der-wankelmotor.de>

1964 war das erste Serienfertige Auto mit Wankelmotor vom Band gelaufen: der NSU Wankel-Spider.



*Abb: Der Wankel-Spider<sup>3</sup>*

Der Motor hatte eine Leistung von 50 PS bei 6000 U/min und ein maximales Drehmoment von 71 Nm bei 2500 U/min.

Der Ro80 war das erste Serienauto von NSU mit einem Zweischeiben-Wankelmotor.



*Abb: Der Ro80 von NSU<sup>4</sup>*

---

<sup>3,4</sup> <http://www.der-wankelmotor.de>

Das Kammervolumen des Motors beinhaltete  $2 \times 498\text{cm}^3$ . Die Motorleistung betrug 84,6 kW (115Ps) bei 5500 U/min und einem maximalen Drehmoment von 162 Nm bei 4500U/min. Dieser Ro80 war eines der letzten 1977 ausgelieferten Exemplare.

Die hohen Entwicklungskosten und der mässige Erfolg des Ro80 zwang NSU finanziell in die Knie. 1969 kam es daher zu Fusion mit der VW-Tochtergesellschaft Audi. Die Entwicklung des Wankelmotors wurde noch einige Jahre weiterbetrieben. 1977 stellte man die Produktion des Ro80 ein und der Wankelmotor verschwand aus der deutschen Automobilszene. Anders sah es in Japan aus. Hier brachte Mazda ab 1967 mehrere mit Wankelmotoren betriebene PKWs auf den Markt. Sogar ein Kleintransporter für den US-Markt und ein Kleinbus für den japanischen Markt wurden mit Wankelmotoren angeboten. Mazda konnte sich als einziger Hersteller mit dieser Antriebsart durchsetzen und hat heute über 40 wichtige Patente für die moderne Generation von Wankelmotoren.

1988 starb Felix Wankel im Alter von 86 Jahren.



## 5 Dichtungssystem

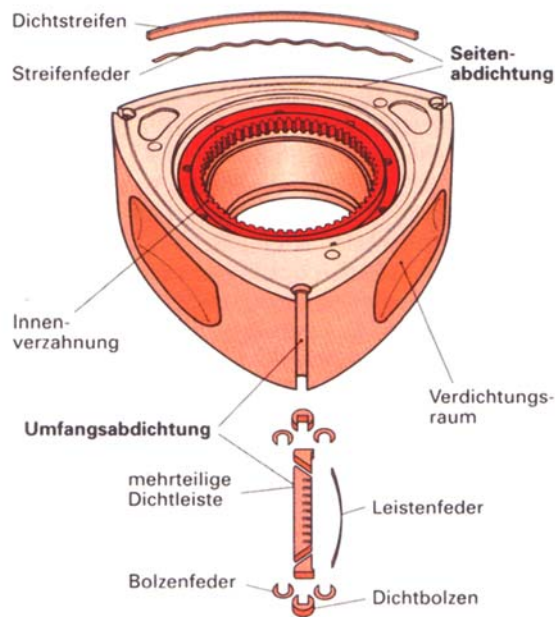


Abb: Dichtungssystem des Kolbens<sup>5</sup>

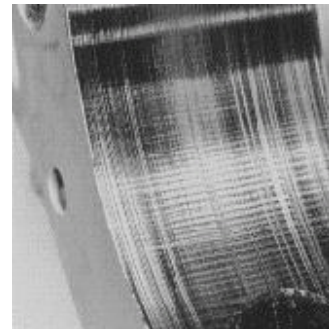


Abb: Kratzspuren in der Lauffläche<sup>6</sup>

Das Dichtungssystem des Wankelmotors hat die Aufgabe, die drei Kammern gegeneinander abzudichten. Dabei unterscheidet man die Seitenabdichtung und die Umfangsabdichtung. Im Vergleich zu einem Hubkolbenmotor ist die abzudichtende Fläche des Wankelmotors enorm gross, zudem wirken durch die Drehbewegung extrem grosse Kräfte auf die Umfangsabdichtungen, was insgesamt zu einem stark erhöhten Verschleiss führt. Noch heute sind die Probleme der Abdichtung vorhanden, welche zu früheren Zeiten oftmals die Weiterentwicklung des Wankelmotors verhinderte. Wegen der Dichtungsprobleme kam es oft zu Kratzspuren auf der Lauffschicht, der Chrom der Lauffschicht platzt ab und die Motoren verschleissen innerhalb kürzester Zeit. Bei Mazda erkannte man, dass massgeblich das Gewicht der Dichtleiste hierfür verantwortlich war. Man durchbohrte im Versuch Gussdichtleisten der Länge nach und kam endlich auf große Laufzeiten. Zudem wurden immer wieder neuere Materialien ausprobiert.

<sup>5</sup> Fachkunde Kraftfahrzeugtechnik 27.Auflage, S.369

<sup>6</sup> <http://www.der-wankelmotor.de>

## 6 Vor- & Nachteile des Wankelmotors

### 6.1 Vorteile:

- Grosse Laufruhe, da die Hauptteile (Kolben und Exzenterwelle) nur eine Rotationsbewegung ausführen. Durch den vollkommenen Massenausgleich benötigt der Wankelmotor keine Ausgleichswellen
- Keine Bauteile für Motorsteuerung (z.B. Ventile, Nockenwelle)
- Weniger Bauteile, dadurch geringeres Gewicht
- Weniger Verschleissteile
- Niedriger Oktanzahlbedarf, da er schon sehr lauf ruhig ist
- Gut geeignet für Betrieb mit Wasserstoff, weil der Gaskanalquerschnitt unverengt ist und dadurch ein vorzeitiges Entzünden des Wasserstoffes verhindert wird.

### 6.2 Nachteile:

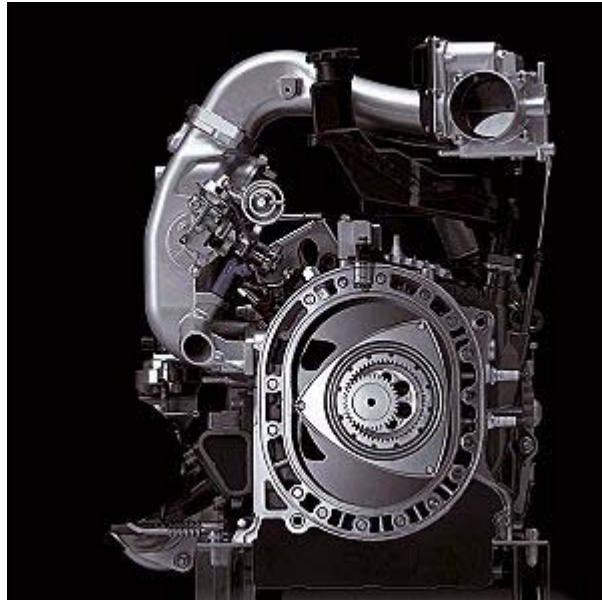
- Ungünstige Form des Verbrennungsraumes
- Höherer Kraftstoff- und Ölverbrauch
- Hohe Abgaswerte (v.a. HC)
- Aufwändige Abdichtung am Kolben
- Höhere Herstellungskosten

## 7 Zukunftsaussichten

### 7.1 Renesis-Motor

Der von Mazda neu entwickelte „Renesis“ Wankelmotor kommt im ebenfalls neu entwickelten RX-8 Auto zum Einsatz. Dieser Motor zeigt, dass auch im Wankelmotor noch Zukunftspotential steckt. Die Merkmale der RENESIS-Konstruktion:

Die Seitenauslasstechnologie führt zu einer wesentlich besseren Effizienz des Motors. Der RENESIS-Motor besitzt auch neue Einspritzdüsen, die ein ultrafeines Sprühmuster erzeugen.



*Abb: Der von Mazda entwickelte „Renesis“ Wankelmotor<sup>7</sup>*

Mit den Hochleistungszündkerzen führt dies zu einer optimierten Verbrennung des Kraftstoff-Luft-Gemischs. Der Abgaskrümmter ist doppelwandig und hält die Abgastemperaturen hoch, dadurch kommt der Katalysator schnell auf Betriebstemperatur. Diese Massnahmen führen dazu, dass der Motor die strenge Euro 4 Abgasnorm erfüllt. Gegenüber dem Vorgänger im RX-7 konnte, laut Mazda, sowohl der Kraftstoff- als auch der Ölverbrauch um 30% bzw. 40% gesenkt werden.

Mazdas neu entwickeltem RENESIS-Wankelmotor, der im neuen Mazda RX-8 Sportwagen zum Einsatz gelangt, ist die Auszeichnung **“International Engine of the Year 2003”** verliehen worden.

---

<sup>7</sup> Fachkunde Kraftfahrzeugtechnik 27.Auflage, S.369

## 7.2 Diesel/Kerosin-Vielstoff-Motor der Wankel Rotary GmbH

1993 wurde die Firma „Wankel Rotary GmbH“ mit Sitz in Korb, Baden-Württemberg, gegründet. In der Entwicklung befand sich unter anderem ein Diesel/Kerosin-Vielstoff-Motor. Dieser Wankelmotor mit 4 Drehkolben wurde zum generellen Fliegen, sowie für unbemannte Land-, Luft-, See- und Untersee-Fahrzeuge entwickelt. Allerdings musste die Firma 1999 Insolvenz beantragen.

Die Entwicklungen liegen seitdem auf Eis.

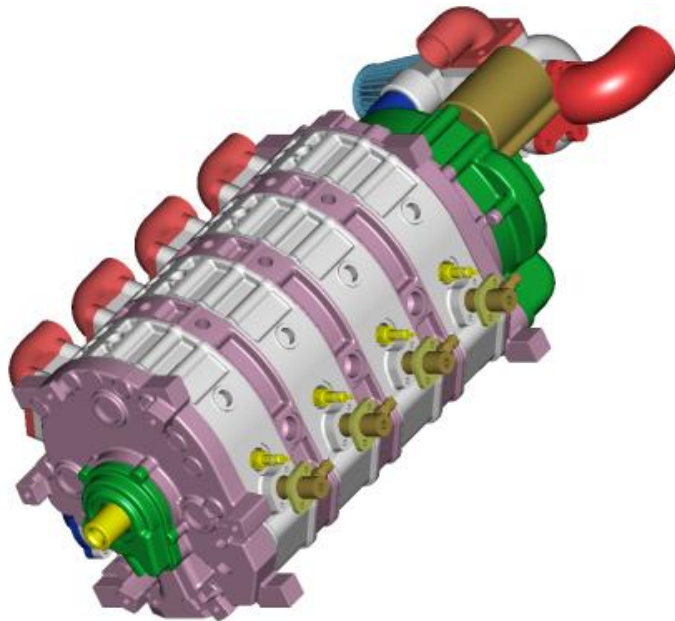


Abb: Wankelmotor der Firma „Wankel Rotary GmbH“<sup>8</sup>

## 7.3 Mini-Rotary Engine

Der zurzeit kleinste Wankelmotor der Welt wurde von der Burkley Universität Kalifornien, USA, entwickelt. Er wird mit Butan- oder Propangas betrieben und leistet im Augenblick 2.5 Watt. Anvisiert sind 30 Watt. Das Kammervolumen beträgt  $77.5\text{mm}^3$ . Die Mini-Rotary Engine ist als Ersatz für Batterien gedacht.

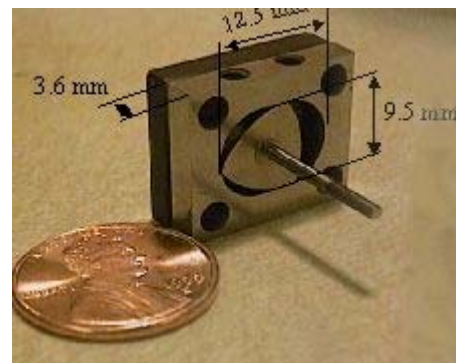
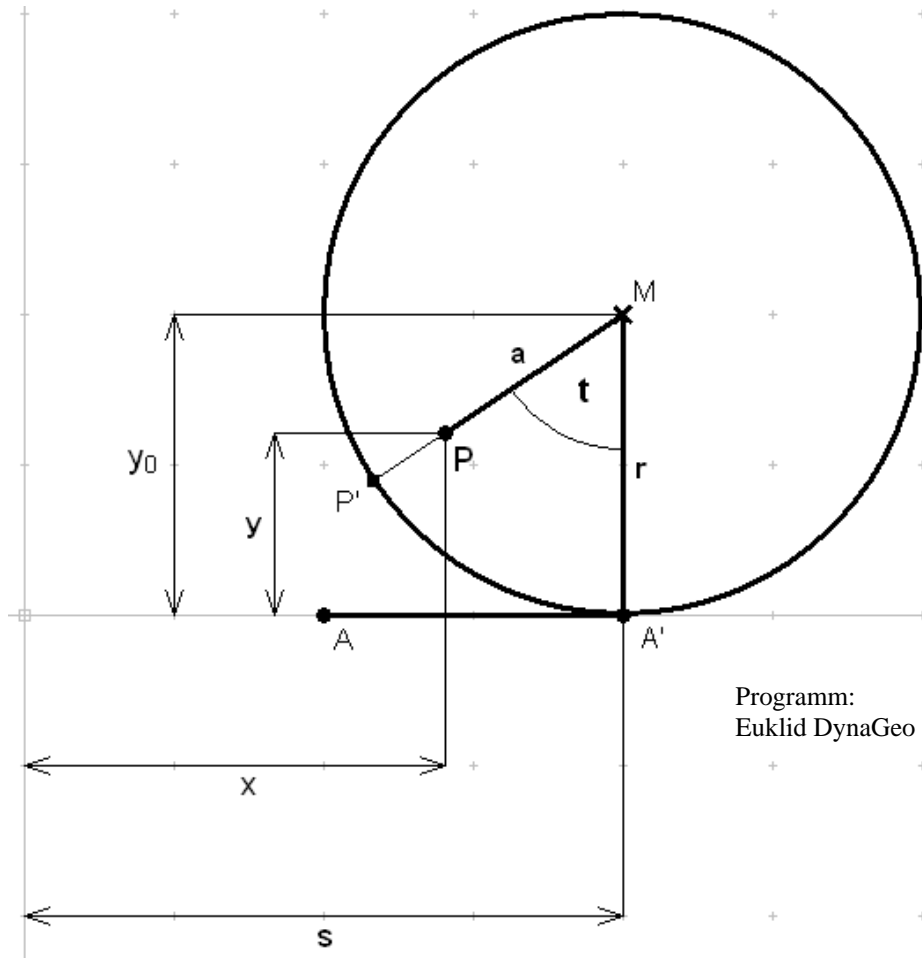


Abb: Mini-Rotary Engine<sup>9</sup>

<sup>8</sup> <http://www.wankel-rotary.com>

<sup>9</sup> <http://www.me.berkeley.edu/mrcl/mini.html>

## 8 Zykloiden - Kreis rollt längs einer Geraden ab



Programm:  
Euklid DynaGeo

Die Strecke  $|AA'|$  und der Kreisbogenabschnitt  $|A'P'|$  sind so gewählt, dass die Abwicklung des Kreisbogenabschnitts gleich der Strecke  $|AA'|$  ist:

$$|AA'| = |A'P'| = |r \cdot t| \quad (1.1)$$

Beim Start hat der Mittelpunkt die Koordinaten  $(x_0, y_0)$ . Während der Bewegung ändert sich nur die x-Koordinate:

$$M(t) = (x_0 + r \cdot t, y_0) ; \text{wobei } x_0 + r \cdot t = s \quad (1.2)$$

Die x-Koordinate  $P(x)$  des Punktes P legt während der Bewegung folgende Strecke relativ zum Mittelpunkt zurück:

$$P(x) = -\sin(t) * a \quad ; \text{da rückwärts} \quad (1.3)$$

Aus der Grafik folgt für die zurückgelegte Strecke  $x(t)$ :

$$x(t) = s + P(x) = (x_0 + r * t) + (-\sin(t) * a) \quad (1.4)$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + r * t - \sin(t) * a} \quad (1.5)$$

Die y-Koordinate  $M(y)$  des Mittelpunktes M ändert sich während der Bewegung nicht

$$M(y) = y_0 \quad (1.6)$$

$$y(t) = M(y) + P(y) \quad (1.7)$$

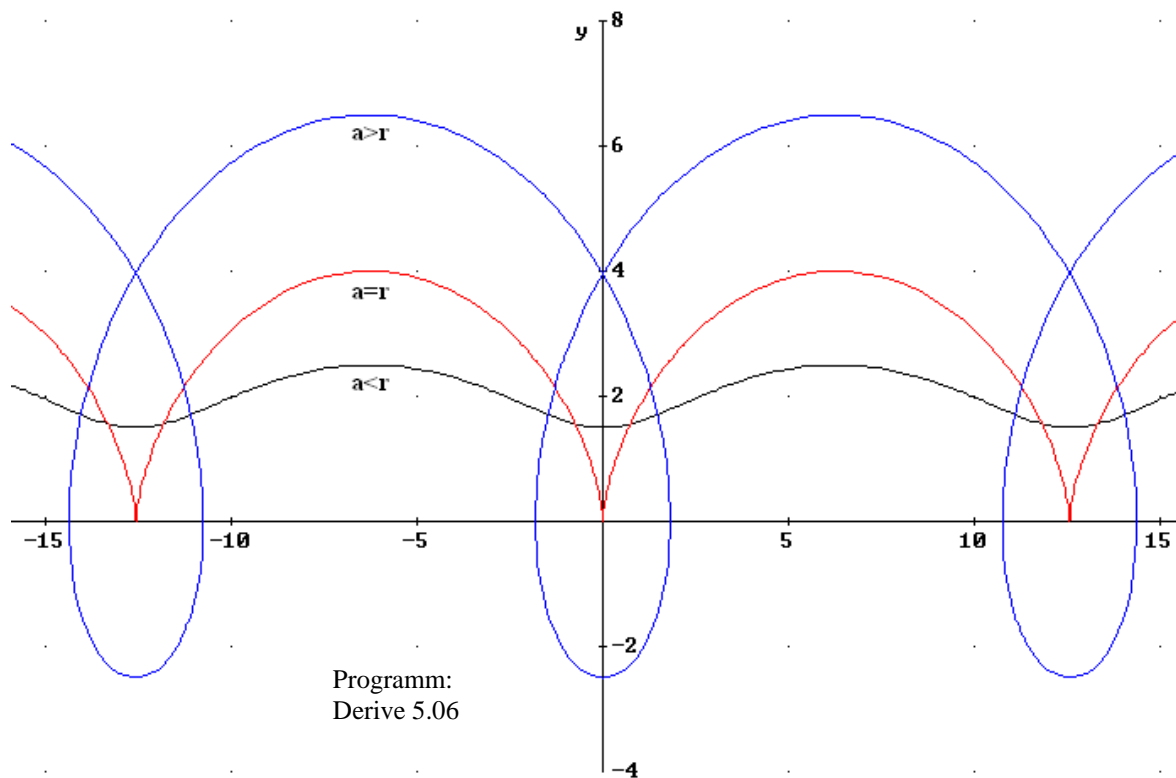
Wobei  $P(y) = -a * \cos(t)$  die y-Koordinate des Punktes P relativ zum Mittelpunkt ist.

Daraus folgt für  $y(t)$ :

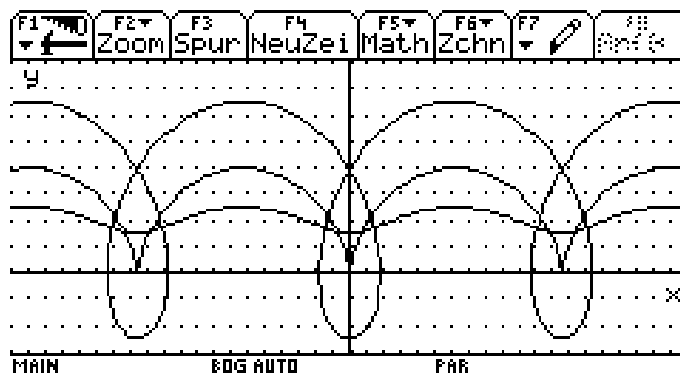
$$\boxed{y(t) = y_0 - \cos(t) * a} \quad (1.8)$$

In den meisten Fällen ist  $y_0 = r$ .

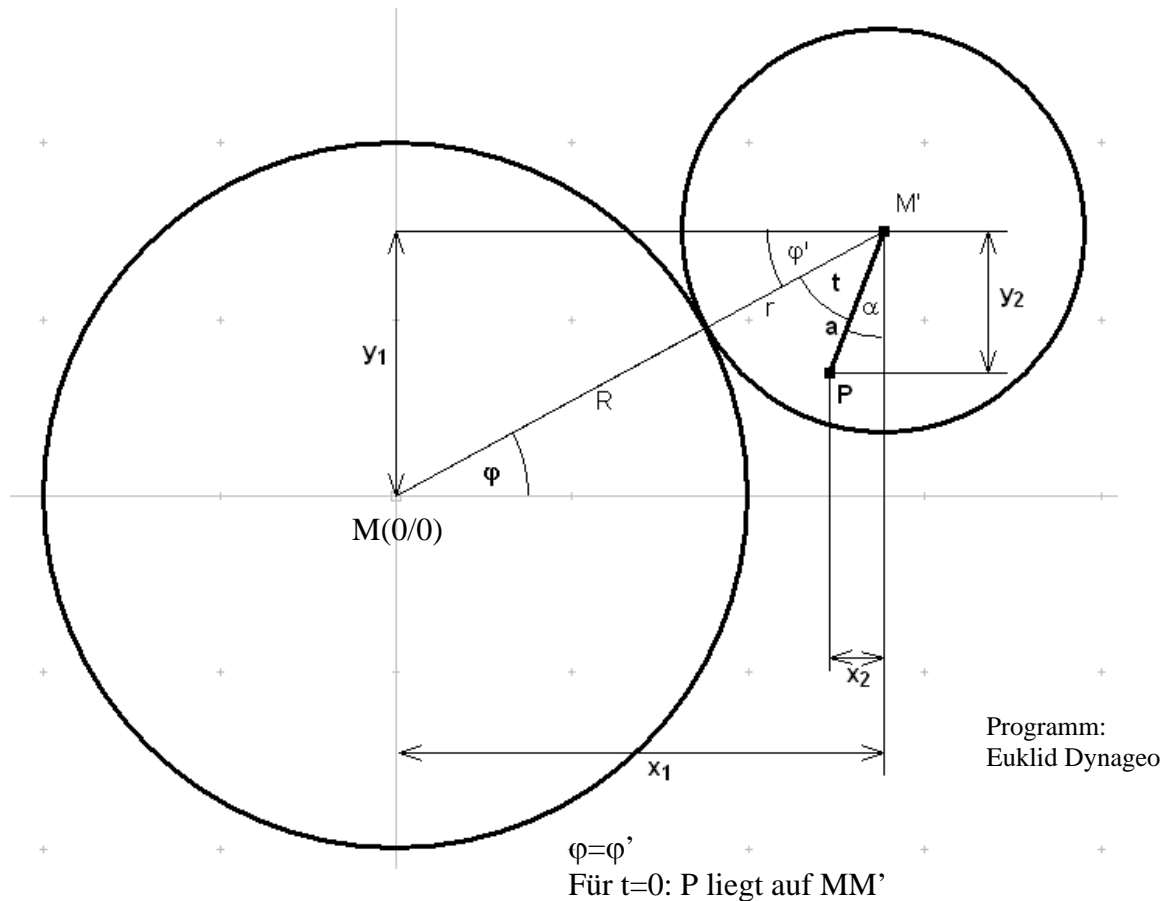
### 8.1 Beispiele von Zykloiden:



Zykloiden mit dem TI 92 Plus:



## 9 Epizykloiden - Kreis mit Radius r rollt aussen auf einem Kreis mit dem Radius R ab



Wie schon bei den Zykloiden gilt hier die Voraussetzung:

$$|t * r| = |\varphi * R| \quad (2.1)$$

Um die zurückgelegte Strecke in x-Richtung  $x(t)$  vom Punkt P zu bestimmen, wird zuerst  $x_1$  berechnet und anschliessend  $x_2$  subtrahiert:

$$x_1 = (R + r) * \cos(\varphi) \quad (2.2)$$

$$x_2 = a * \sin(\alpha) ; \text{ wobei } \alpha = \frac{\pi}{2} - (\varphi + t) \quad (2.3)$$



$$x(t) = x_1 - x_2 \quad (2.4)$$

$$x(t) = (R + r) * \cos(\varphi) - a * \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi + t)\right] \quad (2.5)$$

Da die Sinus- und Kosinusfunktion nur verschobene Funktionen sind und der Kosinus spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse ist, folgt:

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - b\right] = \cos(-b) = \cos(b)$$

Durch Einsetzen von (2.1) in (2.5) folgt:

$$x(t) = (R + r) * \cos\left[\left(\frac{r}{R}\right) * t\right] - a * \cos\left[\left(\frac{r}{R}\right) * t + t\right]$$

$$\boxed{x_p(t) = (R + r) * \cos\left[\left(\frac{r}{R}\right) * t\right] - a * \cos\left[\left(\frac{r + R}{R}\right) * t\right]} \quad (2.6)$$

Um die zurückgelegte Strecke in y-Richtung  $y(t)$  vom Punkt P zu bestimmen, ist es am einfachsten  $y_2$  von  $y_1$  zu subtrahieren:

$$y_1 = (R + r) * \sin(\varphi) \quad (2.7)$$

$$y_2 = a * \sin(\varphi + t) \quad (2.8)$$

$$y(t) = y_1 - y_2 \quad (2.9)$$

$$y(t) = (R + r) * \sin(\varphi) - a * \sin(\varphi + t) \quad (2.10)$$

$$\boxed{y_p(t) = (R + r) * \sin\left[\left(\frac{r}{R}\right) * t\right] - a * \sin\left[\left(\frac{r + R}{R}\right) * t\right]} \quad (2.11)$$

Ist das Radiusverhältnis  $\frac{R}{r}$  ganzzahlig, so schliesst sich die Kurve nach einem Umlauf.

Bei rationalem Verhältnis schliesst sich die Kurve nach endlich vielen Umläufen. Ist  $\frac{R}{r}$  irrational (z.B.  $\pi$ ), so erreicht der Punkt P seine Ausgangslage nicht wieder.

Vorweg schon einmal ein Bild des Wankelmotors. Besonders zu beachten ist die Gehäuseform:



Abb: Der RENESIS-Wankelmotor des neuen Mazda RX-8<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup><http://www.mazdarx8.ch/chd/rotary/rotarydetail.asp?documentid=1277>

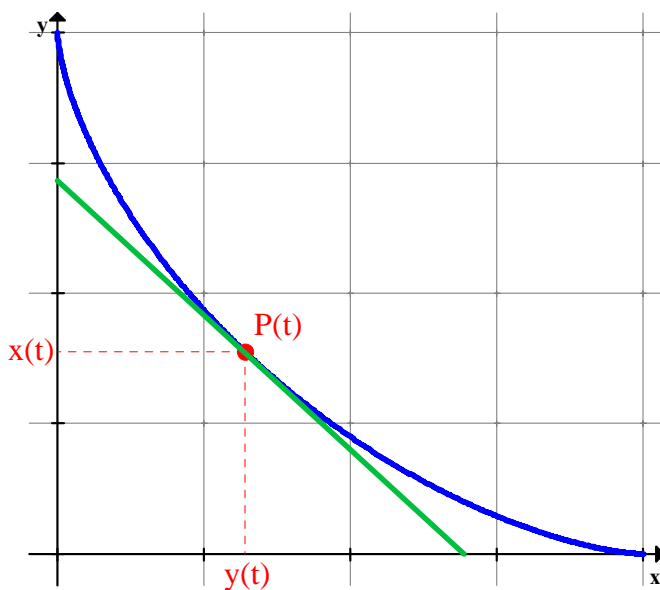
## 9.1 Beispiele von Epizykloiden

Programm: Winplot

$\frac{R}{r}$	$a < r$	$a = r$	$a > r$
$\frac{1}{2}$			
1			
2			
3			
-4			

## 9.2 Bemerkungen zu den Beispielen

- 1) Beim ersten Beispiel muss der abrollende Kreis zweimal um den festen Kreis rollen, da es sich um ein rationales Radiusverhältnis handelt.
- 2) Die Epizykloide bei der  $R/r=1$  und  $a=r$  ist nennt man „Kardioide“, was auf Deutsch „Herzkurve“ bedeutet. Betrachtet man die Kardioide um  $90^\circ$  gedreht, wird verständlich, wie sie zu ihrem Namen kam.
- 3) Beim Radiusverhältnis 2 zu 1 sieht man die Gehäuseform des Wankelmotors, die der Läufer beschreibt.
- 4) Als Astroide (Sternkurve!) bezeichnet man die Kurve, die ein Radiusverhältnis von  $-4$  hat und  $a=r$  ist. Zudem entspricht ein negatives Radiusverhältnis genau einer Hypozykloide d.h., dass der Kreis mit Radius  $r$  innen abrollt (siehe später).

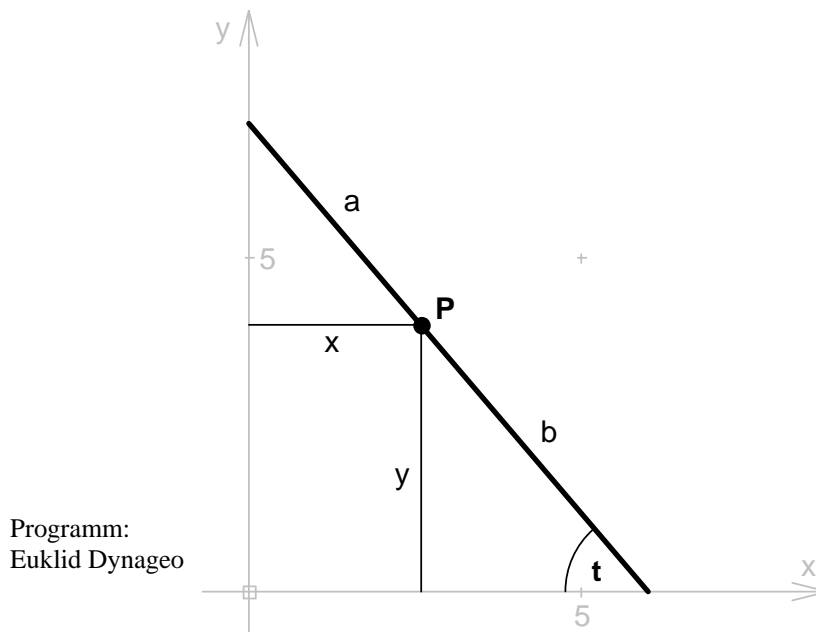


Programm: Winplot

Rutscht ein Stab fester Länge an einem orthogonalen Achsenkreuz ab und bleiben die beiden Enden des Stabes in ständigem Kontakt mit der jeweiligen Achse, so beschreibt der stationäre Punkt  $P(t)$  des Stabes eine Astroide.

Die Astroide ist die Hüllkurve der Lagen des Stabes.

### 9.3 Beweis, dass die Astroide eine Epizykloide ist



Als Voraussetzung muss gelten:

$$c = a + b = \text{konstant} \quad (3.1)$$

$$\cos(t) = \frac{x}{a} \Rightarrow a = \frac{x}{\cos(t)} \quad (3.2)$$

$$\sin(t) = \frac{y}{b} \Rightarrow b = \frac{y}{\sin(t)} \quad (3.3)$$

Ersetzt man nun die beiden Strecken a und b in der Formel (3.1) durch die berechneten Längen aus den Formeln (3.2) und (3.3) so erhält man für c folgendes:

$$\frac{x}{\cos(t)} + \frac{y}{\sin(t)} = c \quad (3.4)$$

Nun wird nach t abgeleitet, um die Gleichung der Hüllkurve zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{\cos(t)} + \frac{y}{\sin(t)} \right) &= \frac{dc}{dt} \\ &= \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} * x - \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} * y = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin^3(t)}{\cos^3(t)} \quad (3.5)$$

Löst man die Gleichung (3.5) nach x bzw. y auf und setzt sie in die Gleichung (3.4) ein, erhält man die Parameterdarstellung der Astroide:

$$x(t) = c * \cos^3(t) = \frac{c}{4} * (\cos(3t) + 3 * \cos(t)) \quad (3.6)$$

$$y(t) = c * \sin^3(t) = -\frac{c}{4} * (\sin(3t) - 3 * \sin(t)) \quad (3.7)$$

Zu beweisen war, dass diese letzten beiden Parametergleichungen mit den Gleichungen der Epizykloide mit Radiusverhältnis  $-4$  und  $a=r$  übereinstimmt. Setzt man der Einfachheit halber in den Gleichungen (2.6) & (2.11) den Radius des Festkreises auf 4 und den des abrollenden Kreises auf  $-1$  ergibt sich folgendes:

$$x(t) = \cos\left(\frac{3t}{4}\right) + 3 * \cos\left(\frac{t}{4}\right) \quad (3.8)$$

$$y(t) = \sin\left(\frac{-3t}{4}\right) - 3 * \sin\left(\frac{-t}{4}\right) \quad (3.9)$$

Der Parameter t in der Gleichung (3.9) ist negativ, da der Winkel des abrutschenden Stabes im Uhrzeigersinn dreht, wenn man den Parameter von Null aus laufen lässt!

Um den Beweis zu vollenden, muss nur noch die Konstante c aus den Formeln (3.6) & (3.7) genauer betrachtet werden. Am Anfang der Drehung ( $t=0$ ) ist der mitrotierende Punkt der Epizykloide am weitesten vom Mittelpunkt des festliegenden Kreises entfernt, was genau der Konstanten c entspricht. Da bei  $t=0$  der mitrotierende Punkt der Epizykloide keine y-Koordinate besitzt, ist nur die Gleichung (3.8) zu betrachten:

$$c = \cos\left(\frac{3 * 0}{4}\right) + 3 * \cos\left(\frac{0}{4}\right) = 4 \quad (3.10)$$

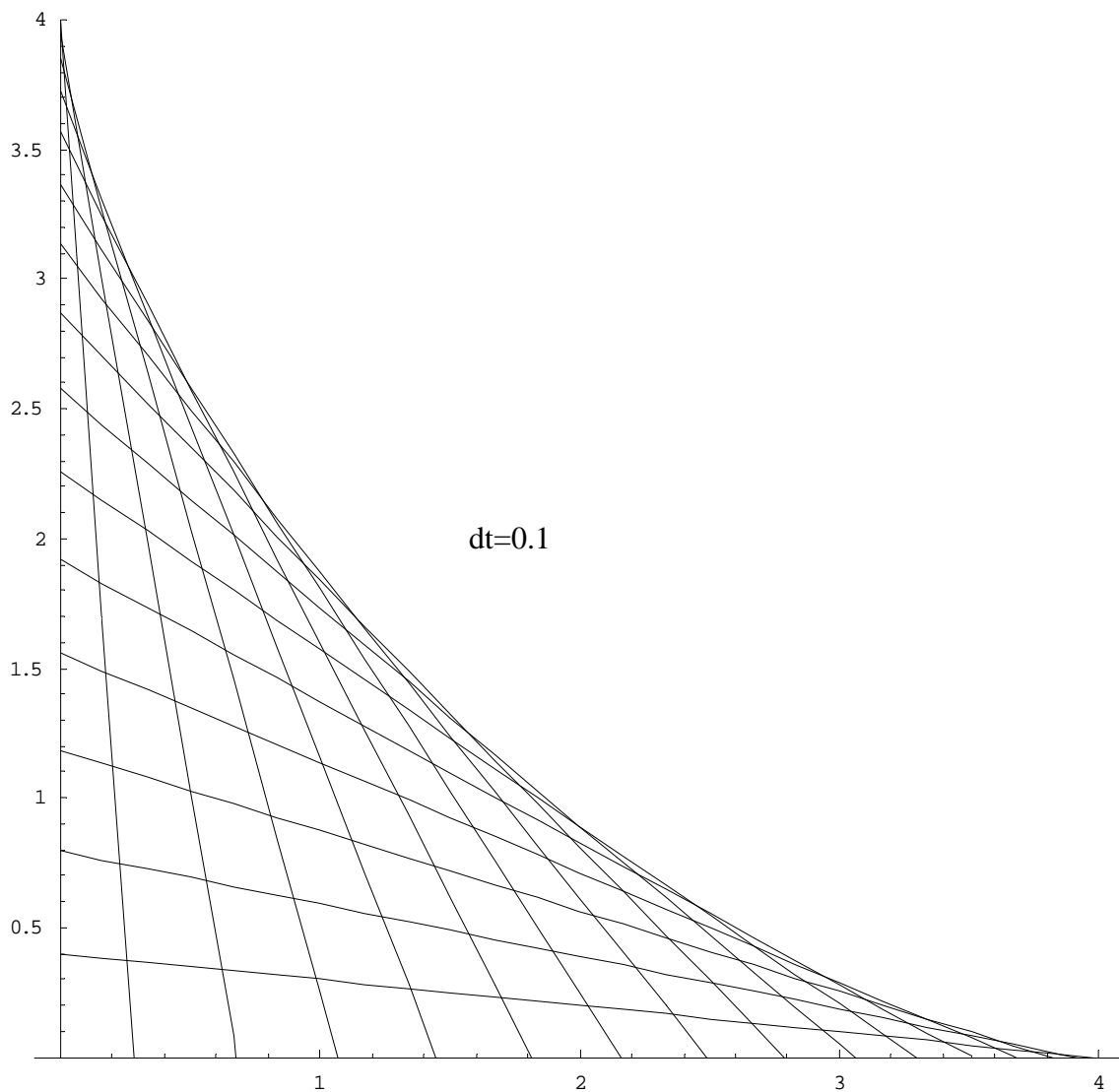
Die berechnete Konstante c kann nun in den Formeln (3.6) & (3.7) substituiert werden:

$$x(t) = \cos(3t) + 3 * \cos(t) \quad (3.11)$$

$$y(t) = -(\sin(3t) - 3 * \sin(t)) \quad (3.12)$$

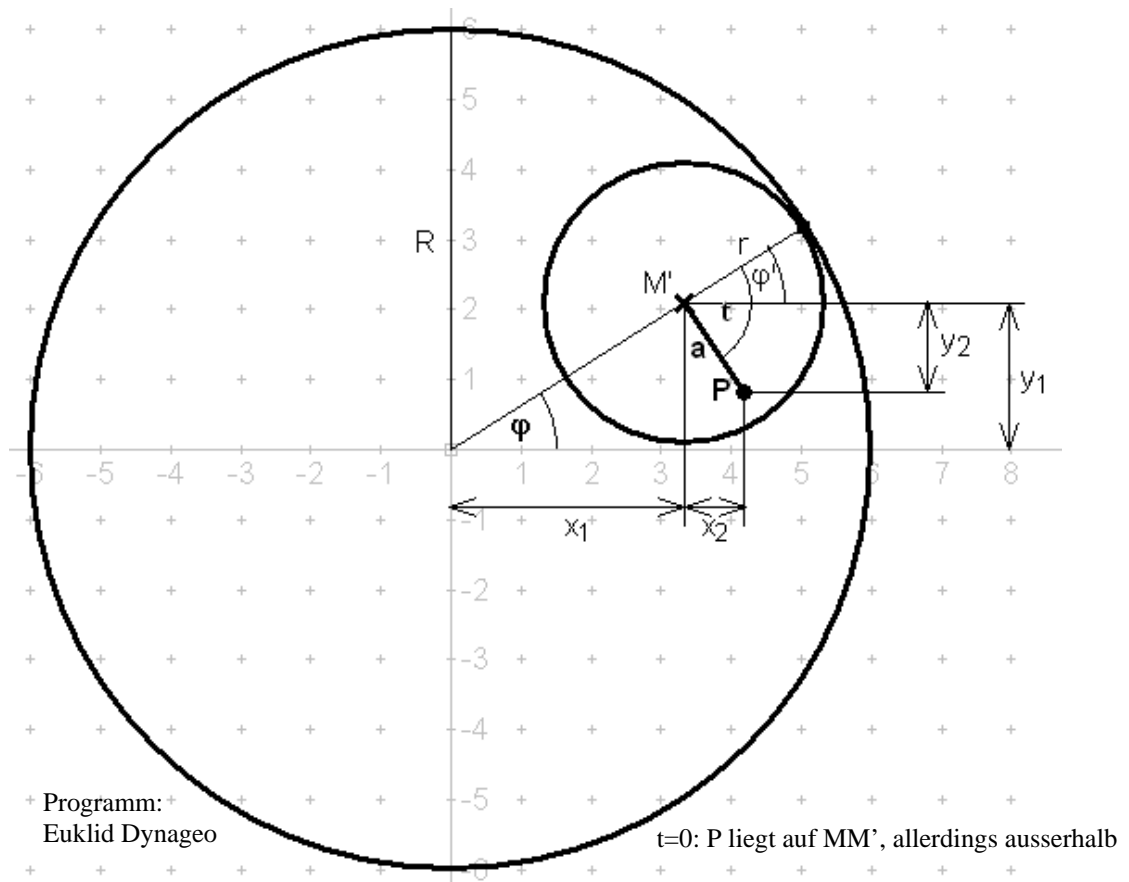
Die Gleichungen (3.8), (3.9) und (3.11), (3.12) unterscheiden sich nur noch in den Perioden, welche sich um  $6\pi$  differenzieren. Hiermit wäre bewiesen, dass die Astroide ein Spezialfall der Epi-, bzw. Hypozykloide ist.

Die einzelnen Lagen des Stabes bilden die Schar der Tangenten an die Astroide und somit schliessen sie die Astroide als Hüllkurve ein:



Programm: Mathematica 5.0.0.0

## 10 Hypozykloiden - Kreis mit Radius $r$ rollt innen auf einem Kreis mit dem Radius $R$ ab



Es gilt hier wieder die Voraussetzung:

$$|\dot{\varphi} * R| = |\dot{t} * r| \quad (4.1)$$

Da  $x_1$  und  $x_2$  summiert die gesuchte Grösse  $x(t)$  ergeben:

$$x_1 = (R - r) * \cos(\varphi) \quad (4.2)$$

$$x_2 = a * \cos(t - \varphi) \quad (4.3)$$

$$x(t) = x_1 + x_2 \quad (4.4)$$

$$x(t) = (R - r) * \cos(\varphi) + a * \cos(t - \varphi) \quad (4.5)$$



Durch Einsetzen von (4.1) in (4.5) folgt:

$$x(t) = (R - r) * \cos\left(\frac{r}{R} * t\right) + a * \cos\left(t - \frac{r}{R} * t\right)$$

$$\boxed{x_p(t) = (R - r) * \cos\left(\frac{r}{R} * t\right) + a * \cos\left(\left(\frac{R - r}{R}\right) * t\right)} \quad (4.6)$$

Die gesuchte Grösse  $y(t)$  berechnet man nach bekannter Manier:

$$y_1 = (R - r) * \sin(\varphi) \quad (4.7)$$

$$y_2 = a * \sin(t - \varphi) \quad (4.8)$$

$$y(t) = y_1 - y_2 \quad (4.9)$$

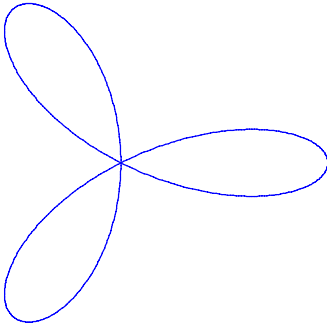
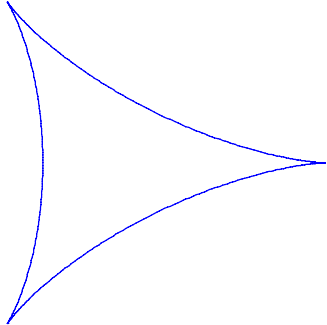
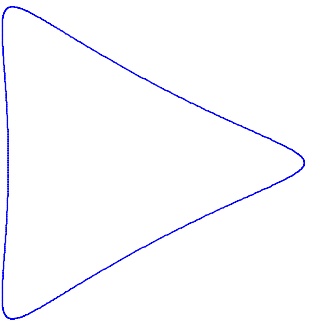



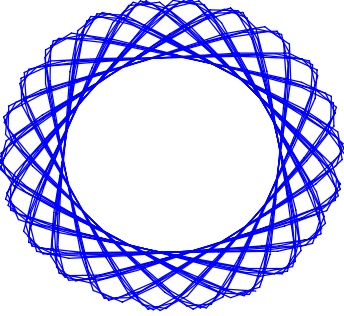
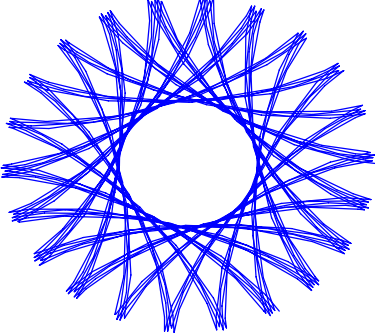
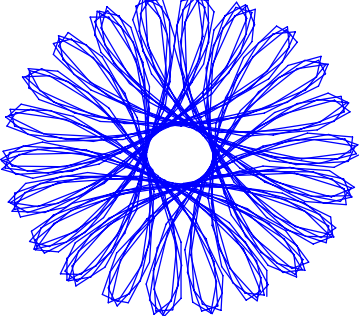
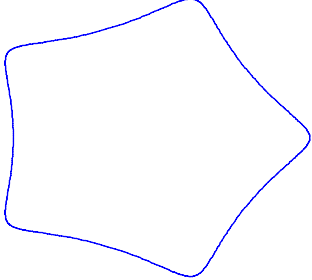
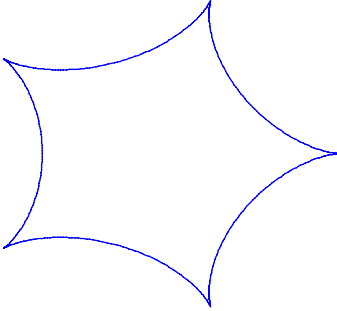
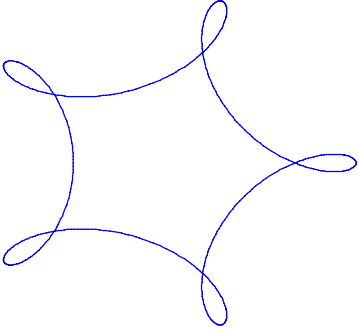
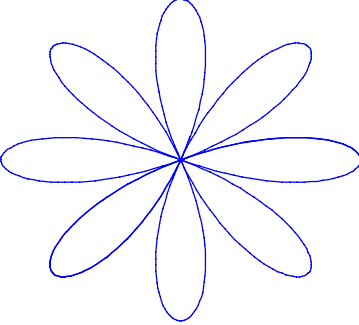
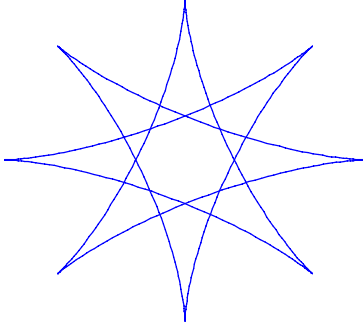
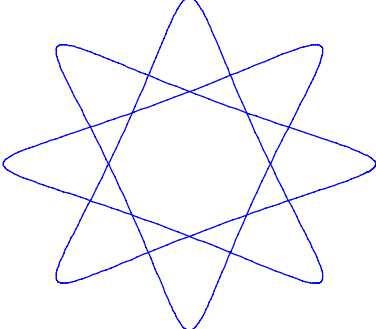
$$y(t) = (R - r) * \sin(\varphi) - a * \sin(t - \varphi) \quad (4.10)$$

$$y(t) = (R - r) * \sin\left(\frac{r}{R} * t\right) - a * \sin\left(t - \frac{r}{R} * t\right)$$

$$\boxed{y_p(t) = (R - r) * \sin\left(\frac{r}{R} * t\right) - a * \sin\left(\left(\frac{R - r}{R}\right) * t\right)} \quad (4.11)$$

### 10.1 Beispiele von Hypozykloiden

Programm: Winplot

$\frac{R}{r}$	$a < r$	$a = r$	$a > r$
$\frac{3}{2}$			
2			
$\pi$	 Nach 100 Umdrehungen	 Nach 100 Umdrehungen	 Nach 100 Umdrehungen
5			
$\frac{8}{5}$			

## 11 Anwendung auf den Wankelmotor

Um die Gehäuseform des Wankelmotors aufzeichnen zu können, ist es am einfachsten, die Gleichungen der Epizykloiden zu betrachten:

$$x_p(t) = (R+r) \cdot \cos\left[\left(\frac{r}{R}\right) \cdot t\right] - a \cdot \cos\left[\left(\frac{r+R}{R}\right) \cdot t\right] \quad (5.1)$$

$$y_p(t) = (R+r) \cdot \sin\left[\left(\frac{r}{R}\right) \cdot t\right] - a \cdot \sin\left[\left(\frac{r+R}{R}\right) \cdot t\right] \quad (5.2)$$

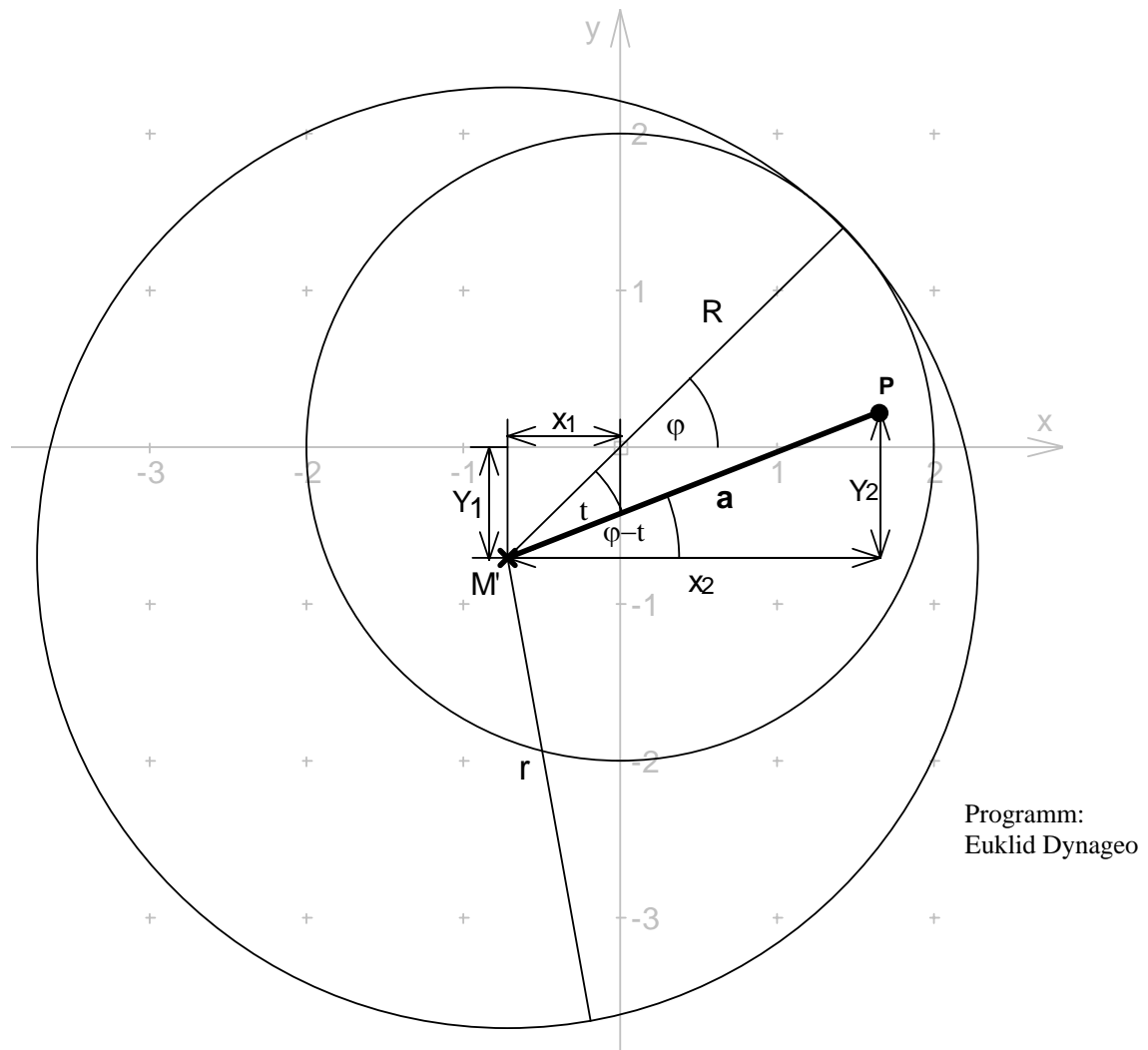
Die geschlossene Kurve des Wankelmotors zeigt 2 Minimalwerte, das heisst, dort berührt der Punkt P den festen Kreis. Bei den Epizykloiden hat das die Bedeutung, dass das Radiusverhältnis  $\frac{R}{r} = 2$  und  $a=r=1$  ist.

$$x_p = 3 \cdot \cos(0.5 \cdot t) - \cos(1.5 \cdot t) \quad (5.3)$$

$$y_p = 3 \cdot \sin(0.5 \cdot t) - \sin(1.5 \cdot t) \quad (5.4)$$

Um die Periode zu berechnen, muss man das kleinste  $t$  finden, so dass  $0.5t$  &  $1.5t$  ein Vielfaches von  $2\pi$  ist. Hier ist es  $0.5 \cdot t$ , das bedeutet, dass wenn man  $t$  bis  $2\pi$  wandern lässt, hat die Sinus- bzw. Kosinusfunktion erst  $1\pi$  zurückgelegt. Deshalb muss die Periode bei einer Umdrehung  $4\pi$  sein.

Um die Form des Wankelmotorgehäuses auch anhand einer Hypozykloide beschreiben zu können, muss man in Betracht ziehen, dass der Radius des innen-abrollenden Kreises grösser wird, als der Radius des festen Kreises.



Weiterhin gelten die gleichen Bezeichnungen wie bei den Hypozykloiden, wobei hier aber  $r > R$ :

$$|\varphi * R| = |t * r| \quad (5.5)$$

Subtrahiert man  $x_1$  von  $x_2$  erhält man die gesuchte Grösse  $x(t)$ :

$$x_1 = (r - R) * \cos(\varphi) \quad (5.6)$$

$$x_2 = a * \cos(\varphi - t) = a * \cos(t - \varphi) \quad (5.7)$$

$$x(t) = x_2 - x_1 \quad (5.8)$$

$$x(t) = a * \cos(t - \varphi) - (r - R) * \cos(\varphi) \quad (5.9)$$

Durch Einsetzen von (5.5) in (5.9) folgt:

$$\boxed{x(t) = a * \cos\left[\left(\frac{R-r}{R}\right) * t\right] - (r - R) * \cos\left(\frac{r}{R} * t\right)} \quad (5.10)$$

Die gesuchte Grösse  $y(t)$  wird durch die Summierung berechnet:

$$y_1 = (r - R) * \sin(\varphi) \quad (5.11)$$

$$y_2 = a * \sin(\varphi - t) = -a * \sin(t - \varphi) \quad (5.12)$$

$$y(t) = y_2 - y_1 \quad (5.13)$$

$$y(t) = -a * \sin(t - \varphi) - (r - R) * \sin(\varphi) \quad (5.14)$$

$$\boxed{y(t) = -a * \sin\left[\left(\frac{R-r}{R}\right) * t\right] - (r - R) * \sin\left(\frac{r}{R} * t\right)} \quad (5.15)$$

Um die Gehäuseform des Wankelmotors auch mit einer Hypozykloidenfunktion beschreiben zu können vergleicht man die schon berechnete Epizykloide aus den Gleichungen (5.3), (5.4):

$$3 * \cos(0.5 * t) - \cos(1.5 * t) = a * \cos\left[\left(\frac{R-r}{R}\right) * t\right] - (r - R) * \cos\left(\frac{r}{R} * t\right) \quad (5.16)$$

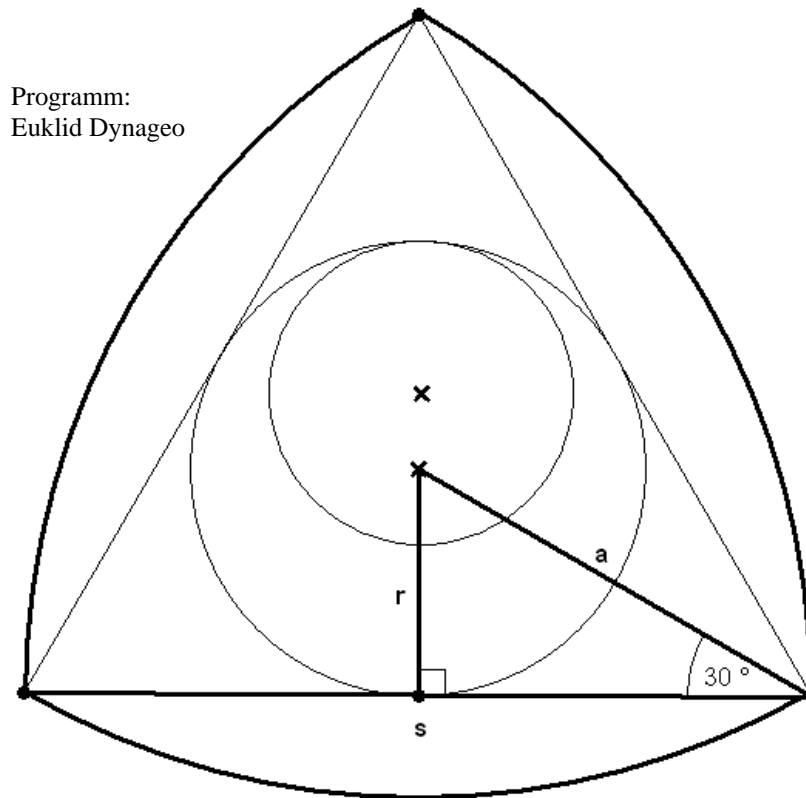
$$3 * \sin(0.5 * t) - \sin(1.5 * t) = -a * \sin\left[\left(\frac{R-r}{R}\right) * t\right] - (r - R) * \sin\left(\frac{r}{R} * t\right) \quad (5.17)$$

Die Konstante  $a$  hat eigentlich keine Bedeutung um das Radiusverhältnis zu berechnen.

Eine numerische Lösung dieser Gleichungen ergibt für die Hypozykloide:

$$\frac{R}{r} = \frac{2}{3} ; \text{mit Periode } 4\pi \quad (5.18)$$

Um die Länge von  $a$  herauszufinden, betrachtet man die folgende Grafik:



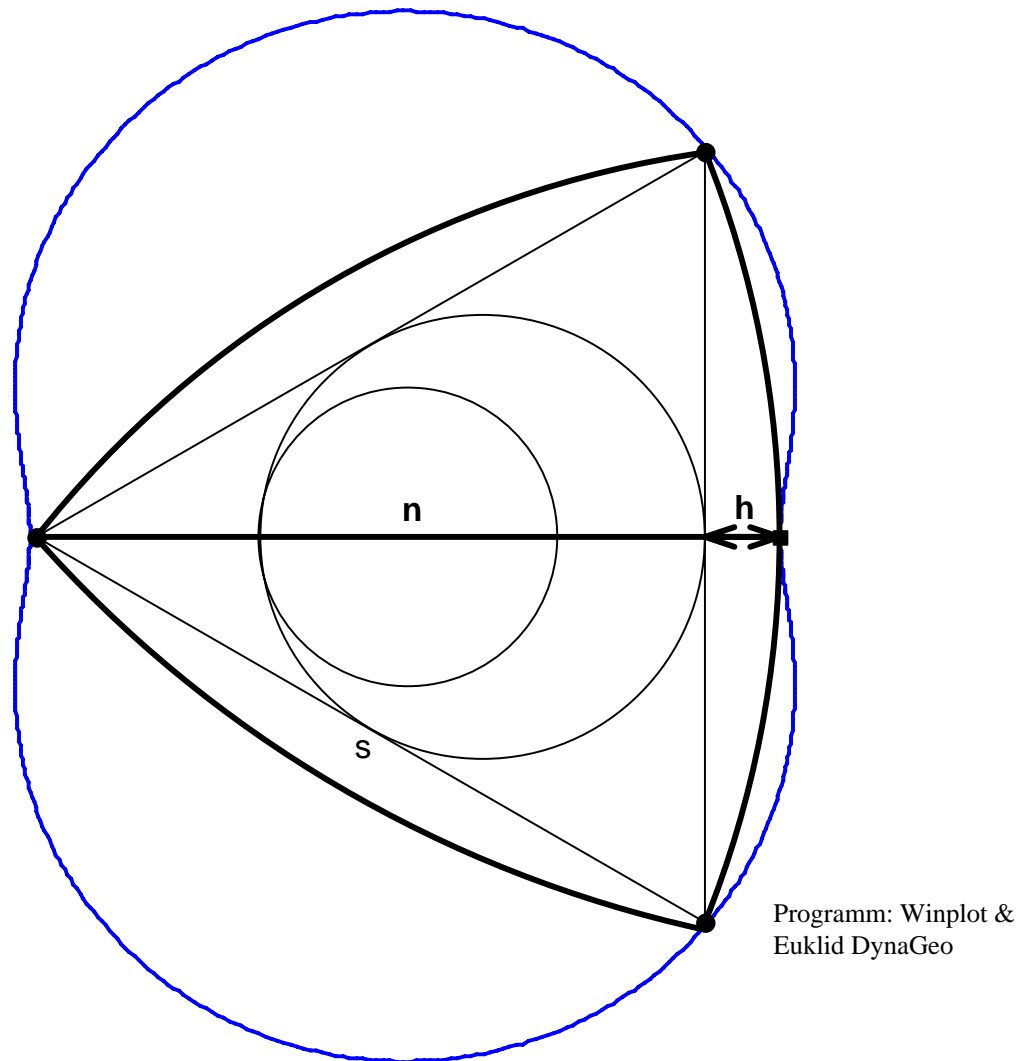
Durch die Anwendung vom Sinus kann  $a$  leicht berechnet werden:

$$a = \frac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2r \quad (5.19)$$

Für weitere Berechnungen ist es notwendig, die Länge einer Dreiecksseite  $s$  zu kennen:

$$s = 2 * \left( \cotan\left[\frac{\pi}{6}\right] * r \right) = 2r * \sqrt{3} \quad (5.20)$$

## 11.1 Der Läufer



Als erstes wird der Flächeninhalt des ganzen Läufers berechnet, d.h. das ganze Gebiet innerhalb des Läufers (inkl. innerer Kreis).

Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks mit Strecke  $s$  beträgt:

$$A_D = \frac{s^2}{4} * \sqrt{3} \quad (6.1)$$

Nun zu den 3 Kreisabschnitten (Kreissegmenten):

Um die Gesamtlänge von  $n+h$  zu berechnen, ist es notwendig, die Formel (5.19) in die Funktionsgleichung (5.10) einzusetzen und den Parameterwert  $t$  auf Null zu setzen:

$$n + h = 2 * \left( 2r * \cos \left[ \left( 1 - \frac{r}{R} \right) * 0 \right] - (r - R) * \cos \left( \frac{r}{R} * 0 \right) \right) = 2r + 2R \quad (6.2)$$

Da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt, kann man, um h zu erhalten, leicht n bestimmen:

$$n = \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) * s \quad (6.3)$$

Durch Einsetzen der Formel (5.20) in (6.3) erhält man:

$$n = \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) * 2r * \sqrt{3} = 3r \quad (6.4)$$

Um h zu erhalten wird von der Gleichung (6.2) das gerade eben berechnete n abgezogen:

$$h = 2r + 2R - \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) * 2r * \sqrt{3} = 2R - r \quad (6.5)$$

Da der Radius f und der Öffnungswinkel  $\alpha$  dieses Kreisbogens noch unbekannt sind, sollten diese zuerst berechnet werden, bevor die Flächen der Kreisabschnitte bestimmt werden. Der Einfachheit halber werden die Gleichungen nach  $\alpha$  und f für die Radien  $R=2$  und  $r=3$  aufgelöst:

$$s = 2 * 3 * \sqrt{3} = 2f * \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \quad (6.6)$$

$$h = 2 * 3 - 2 = 2f * \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right) \quad (6.7)$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.760502$$

$$\Rightarrow f = 14.00000$$

Zu der Fläche eines Kreisabschnittes:

$$A_K = \frac{f^2}{2} * (\alpha - \sin(\alpha)) = 6.979255 \quad (6.8)$$

Für die Gesamtfläche gilt:

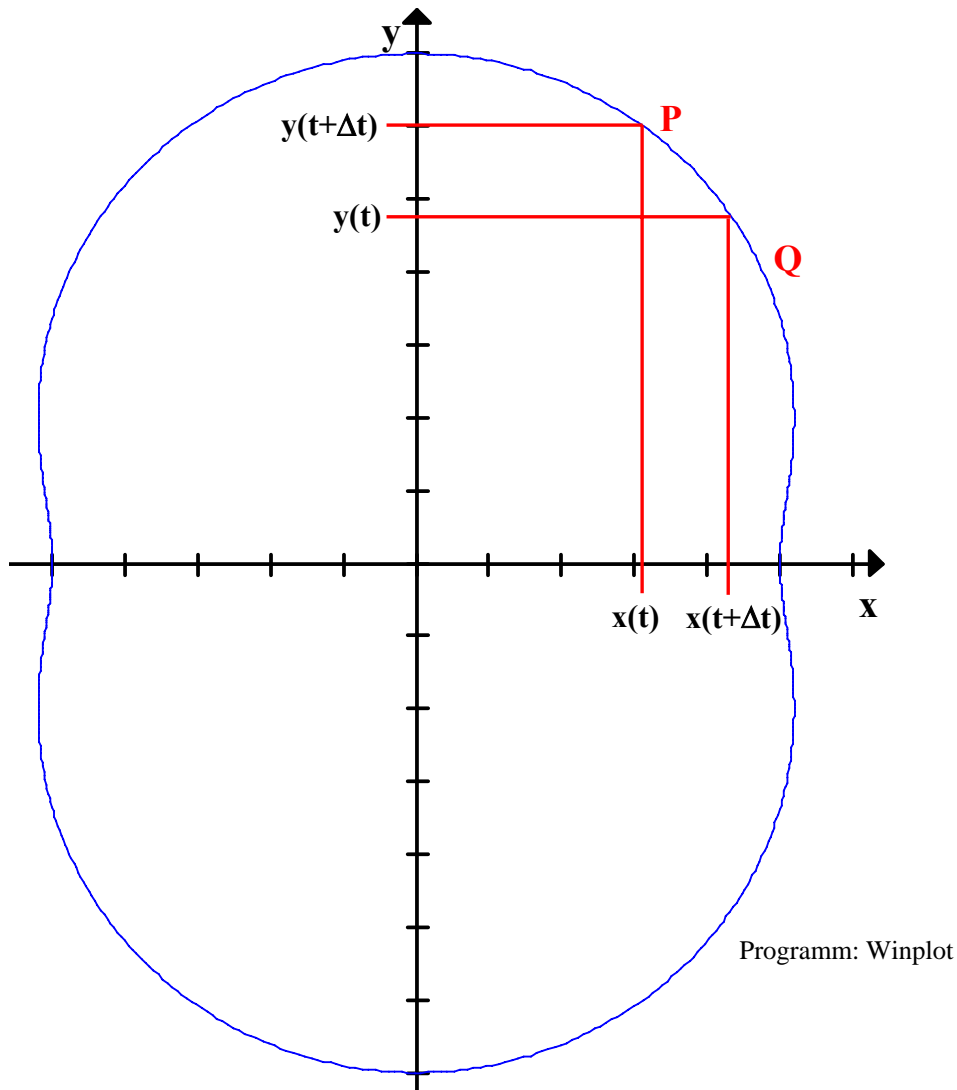
$$A_{Ges} = A_D + 3 * A_K \quad (6.9)$$

$$A_{Ges} = 3 * \sqrt{3} * 3^2 + 3 * 6.979255 = 67.703137 \quad (6.10)$$



## 11.2 Kurvenlänge der Läufer Spitze

In diesem Abschnitt soll die Bogenlänge der Gehäuseform des Wankelmotors berechnet werden.



Die Länge zwischen den beiden Punkten P und Q kann anhand des Satzes des Pythagoras näherungsweise bestimmt werden:

$$L_S = \sqrt{(y(t + \Delta t) - y(t))^2 + (x(t + \Delta t) - x(t))^2} \quad (7.1)$$

Lässt man nun  $\Delta t$  gegen Null laufen, so erhält man gerade die Ableitungen der beiden einzelnen Funktionen nach  $t$ . Hier sieht man den Vorteil, dass die Funktion parametrisiert ist:

$$dL_S = \sqrt{(\dot{y}(t))^2 * dt^2 + (\dot{x}(t))^2 * dt^2} = \sqrt{(\dot{y}(t))^2 + (\dot{x}(t))^2} * dt \quad (7.2)$$

Nun lässt man  $t$  von 0 bis  $4\pi$  laufen und nimmt die Summe all dieser kleinen Strecken:

$$L_S = \int_0^{4\pi} \sqrt{(\dot{y}(t))^2 + (\dot{x}(t))^2} dt \quad (7.3)$$

Um die Ableitung dieser beiden Funktionen machen zu können, benötigt man erst mal die Ausgangsfunktion. Durch Einsetzen des berechneten  $a$  aus der Formel (5.19) und des Verhältnisses der beiden Radien (5.18) in die Formeln (5.10) und (5.15) entsteht die Funktion:

$$x(t) = 2r * \cos \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \right) * t \right] - (r - R) * \cos \left( \frac{3}{2} * t \right) \quad (7.4)$$

$$y(t) = 2r * \sin \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \right) * t \right] + (r - R) * \sin \left( \frac{3}{2} * t \right) \quad (7.5)$$

Leitet man die beiden Funktionen nach  $t$  ab, ergibt es:

$$\dot{x}(t) = \frac{3 * \sin \left( \frac{3t}{2} \right) * (r - R)}{2} - \sin \left( \frac{t}{2} \right) * r \quad (7.6)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{3 * \cos \left( \frac{3t}{2} \right) * (r - R)}{2} - \cos \left( \frac{t}{2} \right) * r \quad (7.7)$$

$$L_S = \int_0^{4\pi} \sqrt{\left( \frac{3 * \sin \left( \frac{3t}{2} \right) * (r - R)}{2} - \sin \left( \frac{t}{2} \right) * r \right)^2 + \left( \frac{3 * \cos \left( \frac{3t}{2} \right) * (r - R)}{2} - \cos \left( \frac{t}{2} \right) * r \right)^2} dt \quad (7.8)$$

Nimmt man z.B. für  $r=3$  und für  $R=2$ :

$$L_S \approx 40$$

## 11.3 Integration der Hypozykloide des Wankelmotors

Um den Flächeninhalt der geschlossenen Kurve bestimmen zu können, ist es notwendig die Integralrechnung zu benutzen. Diese besagt: „Ist eine Kurve durch eine Parameterdarstellung gegeben und ist die Parameterfunktion  $x(t)$  im  $t$ -Intervall  $[t_1; t_2]$  streng monoton, ist also die Kurve der Graph einer stetigen Funktion und ist  $x(t)$  dort ausserdem stetig differenzierbar, so gilt für den Inhalt  $A_x$  der Fläche zwischen Kurve und  $x$ -Achse im  $t$ -Intervall  $[t_1; t_2]$ :“<sup>11</sup>

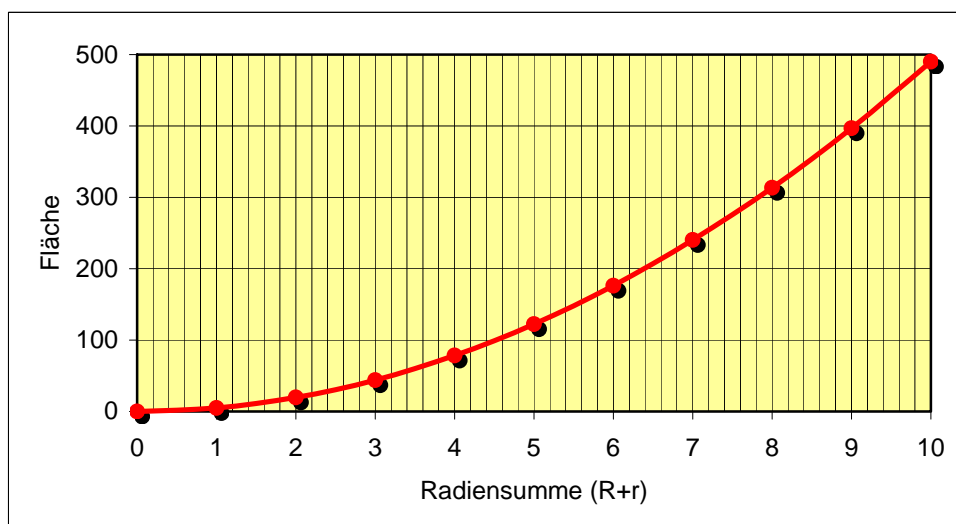
$$A_x = \left| \int_{t_1}^{t_2} [\dot{x}(t) * y(t)] dt \right| \quad (8.1)$$

Das Anwenden der Flächenformel (8.1) auf die beiden Parameterfunktionen (7.4) & (7.5) ergibt:

$$A_G = \left| \int_0^{4\pi} \left[ 2r * \cos \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \right) * t \right] - (r - R) * \cos \left( \frac{3}{2} * t \right) \right] * \left[ 2r * \sin \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \right) * t \right] + (r - R) * \sin \left( \frac{3}{2} * t \right) \right] dt \right|$$

Das Intervall  $[0; 4\pi]$  entspricht natürlich genau der Periode, die schon berechnet wurde.

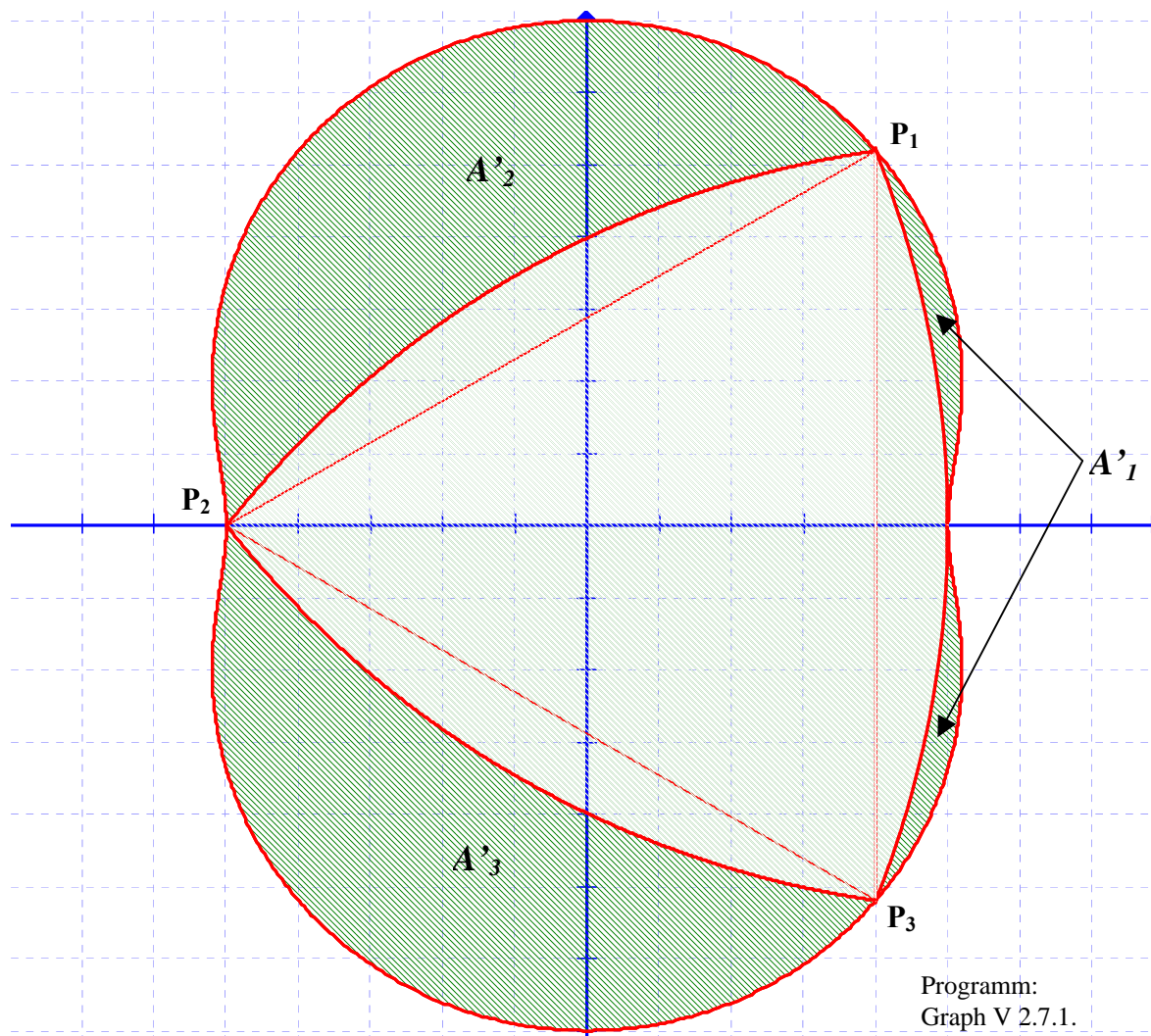
Das nachfolgende Diagramm stellt die Fläche im Verhältnis zur Radiensumme dar:



Programm:  
Microsoft Excel

<sup>11</sup>Kusch Mathematik Bd.4, S. 238

## 11.4 Verdichtungs Vorgänge



Die Grafik zeigt die 3 Arbeitskammern des Wankelmotors. Zudem ist das gerade die Läuferposition, in der die maximalen ( $A'_2$  und  $A'_3$ ) Kammervolumina und das minimale ( $A'_1$ ) Volumen sichtbar sind. Um das tatsächliche Verdichtungsverhältnis bestimmen zu können, muss man die Flächen der Bogen über dem Dreieck auch noch berücksichtigen. Aus diesem Grund werden hier die Flächen, bei denen man die Kreisabschnitte berücksichtigt, mit einem Strichlein versehen, z.B.  $A'_1$ , und bei denen wo man sie nicht berücksichtigt ohne Strichlein, z.B.  $A_1$ . Vorerst wird die 3.Dimension vernachlässigt, was aber auf das Verdichtungsverhältnis keine Auswirkungen hat.

Als erstes werden die Parameterwerte  $t$  von  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  berechnet.

Am einfachsten zu berechnen ist der Parameterwert des Punktes  $P_2$ , da er sich gerade in der Hälfte befindet:

$$t_2 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \quad (9.1)$$

Da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt, kann man nun  $t_1$  leicht berechnen:

$$\begin{aligned} t_1 + \frac{4\pi}{3} &= t_2 \quad ; \text{wobei } t_2 = 2\pi \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Bei der Berechnung des Parameterwertes für  $t_3$  kann man gleichermassen vorgehen:

$$\begin{aligned} t_3 - \frac{4\pi}{3} &= t_2 \quad ; \text{wobei } t_2 = 2\pi \\ \Rightarrow t_3 &= \frac{10\pi}{3} \end{aligned}$$

Um den Flächeninhalt  $A_1$  zu erhalten, muss die Kurvenfunktion im Intervall  $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$  integriert werden.

$$A_1 = \left| \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} [\dot{x}(t) * y(t)] dt \right| \quad (9.3)$$

Um  $A_1'$  zu erhalten, wird von  $A_1$  die Fläche des Kreissegmentes (6.8) abgezogen:

$$A_1' = \left| \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} [\dot{x}(t) * y(t)] dt \right| - 6.979255 \quad (9.4)$$

Weil  $A_2' = A_3'$  ist, kann man folgende Überlegung anstellen: Man zieht von dem vorgängig berechneten gesamten Flächeninhalt der Kurve die Fläche  $A_1'$  und die Läuferfläche ab und dividiert am Schluss durch 2.

$$\frac{\left| \int_0^{4\pi} [\dot{x}(t) * y(t)] dt \right| - A_1' - A_{Ges}}{2} = A_2' = A_3' \quad (9.5)$$

Läuferfläche  $A_{Ges}$  wurde schon weiter oben bestimmt in der Formel (6.10) berechnet.

Nun kann man die ausgerechnete Läuferfläche in die Formel (9.5) einfügen:

$$\frac{\left| \int_0^{4\pi} [\dot{x}(t) * y(t)] dt \right| - \left| \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} [\dot{x}(t) * y(t)] dt \right| + 6.979255 - 67.70314}{2} = A_2' = A_3'$$

Um die Verdichtung angeben zu können, ist es notwendig, das Verhältnis der Formeln (9.5):(9.4) zu berechnen. Die Radienwerte  $R=2$  und  $r=3$  behalten auch bei dieser Rechnung dieselben Werte, weil die Kreissegmente schon mit diesen Werten berechnet wurden:

$$\boxed{\text{Verdichtung} = 9.710144 : 1} \quad (9.6)$$

Der neue RENESIS-Wankelmotor im Mazda RX-8 hat eine Verdichtung von 10:1 !

## 12 Diskussion

Die mathematischen Berechnungen bezüglich des Verdichtungsverhältnisses stimmen nur näherungsweise mit der Realität überein, denn in der Weiterentwicklung des Wankelmotors wurden unter anderem Verdichtungsräume in die Seiten des Kolbens eingebracht. Zudem stimmt der in Kapitel 11 berechnete Wert für  $\alpha$  nicht mit der Wirklichkeit überein, doch auch heute noch wird dieser Wert variiert.

Würde man aber diese und andere Faktoren berücksichtigen, wäre es sehr schwierig, das Verdichtungsverhältnis theoretisch zu berechnen. Trotzdem sieht man an der ziemlich guten Übereinstimmung der Volumenänderung, dass die Berechnungen als eine gute Näherung betrachtet werden können.

## 13 Literaturverzeichnis

### Literatur:

- Forum der Technik: Die Welt im Zeichen des Motors, Metz Verlag Zürich 1963, Seite 140-151.
- Europa Lehrmittel: Fachkunde Kraftfahrzeugtechnik, 27.Auflage, Nourney, Vollmer GmbH & Co.
- Kusch Mathematik 4: Integralrechnung, 6.Auflage, 2000, Berlin, Cornelsen Verlag.
- Lexikon der Naturwissenschaftler, 2000 Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg, Berlin.

### Elektronische Medien:

- <http://www.mazdarx8.ch/chd/rotary/rotarydetail.asp?documentid=1277>, 25.01.2004
- <http://www.der-wankelmotor.de/>, 25.01.2004
- <http://www.me.berkeley.edu/mrcl/mini.html>, 25.01.2004
- <http://www.wankel-rotary.com/>, 25.01.2004



## **14 Dank**

Mein Dank geht an:

- Dr. Jakob Brunner, für die freundliche Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit.
- Thomas Bisig, für die Hilfe beim Beginn dieser Arbeit.
- Werner Schmidlin, der die sprachliche Korrektur vornahm.

## **15 Deklaration zur Eigenständigkeit**

Hiermit bestätige ich, Simon Schmidlin, diese Arbeit mit Hilfe der aufgelisteten Literatur selbstständig erarbeitet zu haben.